

同步练习 P266 二. 1.2 理学院 廖国勇 2016. 6. 2

1. 求微分方程 $y'' + \frac{1}{k}y = 0$ ($k \neq 0$) 的通解

解: 特征方程 $r^2 + \frac{1}{k} = 0 \Rightarrow \cancel{r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{k}}} \quad r_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{1}{k}}$

若 $k > 0$, $r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{k}}i$, 方程通解 $y_g = C_1 \cos \sqrt{\frac{1}{k}}x + C_2 \sin \sqrt{\frac{1}{k}}x$

若 $k < 0$, $r_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{1}{k}}$, 方程通解 $y_g = C_1 e^{\sqrt{-\frac{1}{k}}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\frac{1}{k}}x}$

2. 求微分方程 $2y''(x) - 3y'(x) + y(x) = 0$ 满足 $y(1) = 3$ $y'(1) = 1$ 的特解.

解: 特征方程 $2r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = \frac{1}{2}$

微分方程的通解 $y_g = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$

由 $y(1) = 3, y'(1) = 1$ 得
$$\begin{cases} C_1 e + C_2 e^{\frac{1}{2}} = 3 \\ C_1 e + \frac{1}{2}C_2 e^{\frac{1}{2}} = 1 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} C_1 = -e^{-1} \\ C_2 = 4e^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

所以微分方程满足 $y(1) = 3, y'(1) = 1$ 的特解为

$$y_p = -e^{x-1} + 4e^{\frac{1}{2}(x-1)}$$

同步练习 12-4 P267 3.4 理学院 廖国勇 2016.6.2

3. 设某个二阶常系数齐次线性方程的特征方程有相同的实根 a , 求此微分方程, 并求其通解

解: 特征方程为 $(r-a)^2=0$, 即 $r^2-2ar+a^2=0$

微分方程为 $y''-2ay'+a^2=0$

微分方程的通解 $y_g = C_1 e^{ax} + C_2 x e^{ax}$

4. 求微分方程 $y''-4y'-5y = x^2+3x-2$ 的一个特解.

解: 特征方程 $r^2-4r-5=0 \Rightarrow r_1=-1, r_2=5$ $y_1=e^{-x}, y_2=e^{5x}$

方法一, 待定系数法 设特解 $y_p = ax^2+bx+c$ $y_p' = 2ax+b$ $y_p'' = 2a$

把 y_p, y_p', y_p'' 代入微分方程, $2a-4(2ax+b)-5(ax^2+bx+c) = x^2+3x-2$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5a=1 \\ -8a-5b=3 \\ 2a-4b-5c=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{5} \\ b=-\frac{7}{25} \\ c=\frac{68}{125} \end{cases} \therefore y_p = -\frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{25}x + \frac{68}{125}$$

方法二, 利用 朗斯基公式 $y_p = \left(-\int \frac{y_2 f(x)}{w} dx\right) y_1 + \left(\int \frac{y_1 f(x)}{w} dx\right) y_2$

解 $w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{5x} \\ -e^{-x} & 5e^{5x} \end{vmatrix} = 6e^{4x}$

$$\int -\frac{y_2 f(x)}{w} dx = -\int \frac{e^{5x}(x^2+3x-2)}{6e^{4x}} dx = -\frac{1}{6} \int e^x(x^2+3x-2) dx \quad (\text{分部积分})$$

$$= -\frac{1}{6} e^x(x^2+3x-2) + \frac{1}{6} \int e^x(2x+3) dx = -\frac{1}{6} e^x(x^2+3x-2) + \frac{1}{6} e^x(2x+3) - \frac{1}{6} \int e^x dx$$

$$= -\frac{1}{6} e^x(x^2+3x-2-2x-3+2) = -\frac{1}{6} e^x(x^2+x-3)$$

$$\int \frac{y_1 f(x)}{w} dx = \int \frac{e^{-x}(x^2+3x-2)}{6e^{4x}} dx = \frac{1}{6} \int e^{-5x}(x^2+3x-2) dx = -\frac{1}{6 \times 5} e^{-5x}(x^2+3x-2)$$

$$+ \frac{1}{30} \int e^{-5x}(2x+3) dx = -\frac{e^{-5x}}{30}(x^2+3x-2) - \frac{e^{-5x}}{150}(2x+3) + \frac{2}{150} \int e^{-5x} dx$$

$$= -\frac{e^{-5x}}{30} \left[x^2+3x-2 + \frac{1}{5}(2x+3) + \frac{2}{25} \right] = -\frac{e^{-5x}}{30} \left(x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{33}{25} \right)$$

$$y_p = -\frac{1}{6}(x^2+x-3) - \frac{1}{30} \left(x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{33}{25} \right) = -\frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{25}x + \frac{68}{125}$$

注 $y_p = \left(-\int \frac{y_2 f(x)}{w} dx\right) \cdot y_1 + \left(\int \frac{y_1 f(x)}{w} dx\right) \cdot y_2$
 $= -\frac{1}{6} e^x(x^2+x-3) \cdot e^{-x} + \frac{-e^{-5x}}{30} \left(x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{33}{25} \right) \cdot e^{5x}$

同步练习 12.4 P267 5 理学院 2016.6.2

5. 求微分方程 $y'' - y = e^x \cos 2x$ 的一个特解.

解: 特征方程 $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -1$ $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$

方法一, 待定系数

设微分方程的特解为 $y_p = ae^x \cos 2x + be^x \sin 2x$, 则

$$y_p' = (a+2b)e^x \cos 2x + (b-2a)e^x \sin 2x \quad y_p'' = (4b-3a)e^x \cos 2x + (-4a-3b)e^x \sin 2x$$

把 y_p, y_p', y_p'' 代入微分方程并整理得 $(4b-4a)e^x \cos 2x + (-4a-4b)e^x \sin 2x = e^x \cos 2x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4b-4a=1 \\ -4a-4b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{8} \\ b=\frac{1}{8} \end{cases} \quad \text{所以特解 } y_p = \frac{1}{8} e^x (\sin 2x - \cos 2x)$$

方法二, 用朗斯基公式 $y_p = \left(-\int \frac{y_2 f(x)}{W} dx \right) y_1 + \left(\int \frac{y_1 f(x)}{W} dx \right) y_2$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2$$

$$-\int \frac{y_2 f(x)}{W} dx = -\int \frac{e^{-x} \cdot e^x \cos 2x}{-2} dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = +\frac{1}{4} \sin 2x$$

$$\int \frac{y_1 f(x)}{W} dx = \int \frac{e^x \cdot e^x \cos 2x}{-2} dx = -\frac{1}{2} \int e^{2x} \cos 2x dx \triangleq I$$

$$I = -\frac{1}{4} \int e^{2x} d \sin 2x = -\frac{1}{4} e^{2x} \sin 2x + \frac{1}{2} \int e^{2x} \sin 2x dx$$

$$= -\frac{1}{4} e^{2x} \sin 2x - \frac{1}{4} \int e^{2x} d \cos 2x = -\frac{1}{4} e^{2x} \sin 2x - \frac{1}{4} e^{2x} \cos 2x + \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos 2x dx$$

$$= -\frac{1}{4} e^{2x} \sin 2x - \frac{1}{4} e^{2x} \cos 2x - I \Rightarrow I = -\frac{1}{8} e^{2x} \sin 2x - \frac{1}{4} e^{2x} \cos 2x$$

$$y_p = \left(+\frac{1}{4} \sin 2x \right) \cdot e^x + \left(-\frac{1}{8} e^{2x} \sin 2x - \frac{1}{4} e^{2x} \cos 2x \right) \cdot e^{-x}$$

$$= \left(+\frac{1}{4} \sin 2x \right) e^x + \left(-\frac{1}{8} e^x \sin 2x - \frac{1}{8} e^x \cos 2x \right)$$

$$= \frac{1}{8} e^x (\sin 2x - \cos 2x)$$

注: 一般情况下, 用待定系数计算时计算量小。

6. 求微分方程 $y'' - 2y' + y = xe^x$ 的通解

解: 特征方程 $r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1$

设微分方程的一个特解为 $y_p = x^2(ax+b)e^x = (ax^3+bx^2)e^x$

$$y_p' = [ax^3 + (3a+b)x^2 + 2bx]e^x \quad y_p'' = [ax^3 + (6a+b)x^2 + (6a+4b)x + 2b]e^x$$

把 y_p, y_p', y_p'' 代入微分方程整理得

$$[ax^3 + (6a+b)x^2 + (6a+4b)x + 2b]e^x - 2[ax^3 + (3a+b)x^2 + 2bx]e^x + (ax^3 + bx^2)e^x$$

$$= (6ax + 2b)e^x = 6axe^x + 2be^x = xe^x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6a=1 \\ 2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{6} \\ b=0 \end{cases} \quad \text{所以特解 } y_p = \frac{1}{6}x^3e^x$$

于是, 微分方程 $y'' - 2y' + y = xe^x$ 的通解为

$$y_g = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{6}x^3e^x$$

记 1. 二阶线性微分方程的通解关键在于找其一个特别的解。

特解有两种方法可以求出: ① 待定系数法 ② 公式法

2. 一般情况下用待定系数法, 因为计算复杂性低一点(相对公式法)

同步练习 12-4 P268 7. 理学院 2016.6.2 廖国勇

7. 求微分方程 $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x$ 的通解

解: 特征方程 $r^2 - 2r + 5 = 0$ $r_{1,2} = 1 \pm 2i$

设微分方程的一个特解 $y_p = ax e^x \cos 2x + bx e^x \sin 2x$

$$y_p' = [x e^x (a \cos 2x + b \sin 2x)]' = e^x (a \cos 2x + b \sin 2x) + x e^x (a \cos 2x + b \sin 2x)$$

$$+ x e^x (2b \cos 2x - 2a \sin 2x) = e^x (a \cos 2x + b \sin 2x) + x e^x [(a+2b) \cos 2x + (b-2a) \sin 2x]$$

$$y_p'' = e^x (a \cos 2x + b \sin 2x) + e^x (2b \cos 2x - 2a \sin 2x) + e^x [(a+2b) \cos 2x + (b-2a) \sin 2x]$$

$$+ x e^x [(a+2b) \cos 2x + (b-2a) \sin 2x] + x e^x [(2b-4a) \cos 2x + (-2a-4b) \sin 2x]$$

$$= e^x [(2a+4b) \cos 2x + (2b-4a) \sin 2x] + x e^x [(4b-3a) \cos 2x + (-4a-3b) \sin 2x]$$

$$\text{于是 } y'' - 2y' + 5y = e^x [4b \cos 2x - 4a \sin 2x] = e^x \sin 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a = 1 \\ 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\text{特解 } y_p = -\frac{1}{4} x e^x \cos 2x$$

微分方程通解

$$y_g = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{4} x e^x \cos 2x$$

同步练习 12-4. P268. 8 理学院 廖国勇 2016. 6. 2

8. 求微分方程 $y'' - y = \sin^2 x$ 的一个特解.

解: $y'' - y = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$

特征方程 $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1 \quad y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$

设微分方程的特解为 $y_p = a + b \cos 2x + c \sin 2x$, 则

$y_p'' = -4b \cos 2x - 4c \sin 2x$, 把 y_p, y_p'' 代入微分方程整理得

$$-5b \cos 2x - 5c \sin 2x - a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{10} \\ c = 0 \end{cases}$$

于是, 微分方程的一个特解为 $y_p = -\frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cos 2x$

若用朗斯基公式计算如下.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2$$

$$-\int \frac{y_2 f(x)}{W} dx = -\int \frac{e^{-x} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x)}{-2} dx = \frac{1}{4} \int e^{-x} (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int e^{-x} dx - \frac{1}{4} \int e^{-x} \cos 2x dx$$

$$= -\frac{1}{4} e^{-x} + \frac{1}{20} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{10} e^{-x} \sin 2x$$

$$\int \frac{y_1 f(x)}{W} dx = \int \frac{e^x (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x)}{-2} dx = -\frac{1}{4} \int e^x (1 - \cos 2x) dx$$

$$= -\frac{1}{4} e^x + \frac{1}{4} \int e^x \cos 2x dx$$

$$= -\frac{1}{4} e^x + \frac{1}{20} e^x \cos 2x + \frac{1}{10} e^x \sin 2x$$

$$y_p = \left(-\int \frac{y_2 f(x)}{W} dx \right) y_1 + \left(\int \frac{y_1 f(x)}{W} dx \right) y_2$$

$$= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{20} \cos 2x - \frac{1}{10} \sin 2x \right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{20} \cos 2x + \frac{1}{10} \sin 2x \right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cos 2x$$

同步练习 12-4. P269 9. 理学院 廖国勇 2016. 6. 2

9. 求微分方程 $y'' + y = e^x + \cos x$ 的通解

解: 由特征方程 $r^2 + 1 = 0$ 得 $r_{1,2} = \pm i$, 故可设微分方程的

一个特解为 $y_p = ae^x + bx \cos x + cx \sin x$, 则

$$y_p' = ae^x + b \cos x - bx \sin x + c \sin x + cx \cos x$$

$$y_p'' = ae^x - b \sin x - b \sin x - bx \cos x + c \cos x + \cancel{c \cos x} - \cancel{cx \sin x}$$

$$= ae^x - 2b \sin x + 2c \cos x - bx \cos x - cx \sin x$$

把 y_p'' , y_p 代入微分方程

$$ae^x - 2b \sin x + 2c \cos x - bx \cos x - cx \sin x \stackrel{+}{=} ae^x + bx \cos x + cx \sin x$$

$$= 2ae^x - 2b \sin x + 2c \cos x = e^x + \cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ -2b = 0 \\ 2c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

特解 $y_p = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}x \sin x$

于是, 微分方程的通解

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}x \sin x.$$

同步练习 P269 10 理学院 廖国勇 2016. 6. 2

10. 求微分方程 $y'' - 4y' = 5$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$ 的特解

解: 由特征方程 $r^2 - 4r = 0$ 得 $r_1 = 0$, $r_2 = 4$

设微分方程 $y'' - 4y' = 5$ 的一个特解为 $y_p = ax$

$y_p' = a$, $y_p'' = 0$, 把 y_p' , y_p'' 代入微分方程

$$y'' - 4y' = 0 - 4a = 5 \Rightarrow a = -\frac{5}{4} \quad y_p = -\frac{5}{4}x$$

于是微分方程 $y'' - 4y' = 5$ 的通解 y_g 为

$$y_g = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{5}{4}x, \quad \text{则 } y_g' = 4C_2 e^{4x} - \frac{5}{4}$$

由 $y(0) = 1$ 和 $y'(0) = 0$ 得

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 0 = 4C_2 - \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{5}{16} \\ C_1 = \frac{11}{16} \end{cases}$$

所以, 微分方程 $y'' - 4y' = 5$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$

的特解为:

~~$$y = \frac{5}{16} + \frac{11}{16}e^{4x} - \frac{5}{4}x$$~~

$$y = \frac{11}{16} + \frac{5}{16}e^{4x} - \frac{5}{4}x$$

同步练习 P269 11 理学院 廖国勇 2016.6.2

11. 设函数 $\varphi(x)$ 连续, 且满足 $\varphi(x) = e^x + \int_0^x t\varphi(t)dt - x\int_0^x \varphi(t)dt$
求 $\varphi(x)$.

解: 方程两边同时求导, 得微分方程

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= e^x + x\varphi(x) - x\varphi(x) - \int_0^x \varphi(t)dt \\ &= e^x - \int_0^x \varphi(t)dt\end{aligned}$$

上式等式两边再对 x 求导, 得微分方程

$$\varphi''(x) = e^x - \varphi(x)$$

整理得 $\varphi'' + \varphi = e^x$ (*)

由特征方程 $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i$, 可设 (*) 的一个特解为

$$\varphi_p = ae^x \quad \varphi_p' = ae^x \quad \varphi_p'' = ae^x, \text{ 则 } \varphi'' + \varphi = 2ae^x = e^x$$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$, 所以 $\varphi_p = \frac{1}{2}e^x$, 进而得 (*) 的通解

$$\varphi_g = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x \quad \varphi_g' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2}e^x$$

因为 $\varphi(x) = e^x + \int_0^x t\varphi(t)dt - x\int_0^x \varphi(t)dt$ 所以 $\varphi(0) = e^0 + 0 + 0 = 1$

因为 $\varphi'(x) = e^x - \int_0^x \varphi(t)dt$, 所以 $\varphi'(0) = e^0 - 0 = 1$

$$\begin{aligned}\text{即 } \begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + \frac{1}{2}e^0 = 1 \\ -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 + \frac{1}{2}e^0 = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ C_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

综上所述, 所求的 $\varphi(x)$ 为

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x \\ &= \frac{1}{2}(e^x + \cos x + \sin x)\end{aligned}$$